修士論文

On the stability of Riemannian manifolds
(要旨)

0020 益岡竜介

要旨

コンパクトな Riemann 多様体 (M,g) の恒等写像 $id:(M,g)\to(M,g)$ は常に harmonic map である。harmonic map には、Energy の第2変分公式より定まる Jacobi operator がある。(M,g) の恒等写像の場合に、Jacobi operator は、その多様体上のベクトル場全体 $\Gamma(TM)$ に作用する2階の楕円型線型共役作用素 $J^{(M,g)}:\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$ となる。よって $J^{(M,g)}$ の第1固有値 $\lambda_1(M,g)$ が定まる。

コンパクトな多様体 M を1つ固定したとき Jacobi operator $J^{(M,g)}$ の第1固有値 $\lambda_1(M,g)$ は、M 上の metric g だけによって決まる。

したがって、この論文で、次の問題を考えた。

<u>Problem</u>

コンパクトな多様体 M を1つ固定し、その上の metric g を変えることを考える。その

時に，$\lambda_1(M,g)$ がとり得る符号の可能性は何か。

この問題の答えとして得たのが，次の Main Theorem である。

<u>Main Theorem</u>

M をコンパクトな多様体とする。M に対して $\Lambda(M) \subset \{-1, 0, 1\}$ を，$\Lambda(M) = \{\mathrm{sgn}(\lambda_1(M,g)) \mid g : \text{metric on } M\}$ で定める。このとき次の (1)〜(4) が成立する。

(1) $\dim M = 1$ ならば，$\Lambda(M) = \{0\}$ である。

(2) $\dim M = 2$ ならば，$\Lambda(M)$ は M の Euler 数 $\chi(M)$ で決まる。すなわち $\chi(M) \geq 0$ ならば $\Lambda(M) = \{0\}$ であり，$\chi(M) < 0$ ならば，$\Lambda(M) = \{1\}$ である。

(3) $\dim M = 3$ ならば，$\Lambda(M) = \{-1, 0, 1\}$ である。

(4) $\dim M \geqq 4$ ならば $\Lambda(M) \ni -1$ である。

Main Theorem 以外にも，Jacobi

operatorの第1固有値 $\lambda_1(M,g)$ に関する結果をいくつか得た。その中には，直積Riemann多様体に対する次の結果がある。

<u>Corollary</u>

(M_i, g_i) $i=1,2$ をコンパクトなRiemann多様体とする。このとき，次の式が成り立つ．

$$\lambda_1(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2) = \min\{\lambda_1(M_1, g_1), \lambda_1(M_2, g_2)\}$$

修士論文

On the stability of Riemannian manifolds

CC20　益岡竜介

目 次

§0 Introduction

この論文では，特にことわらない限り，$M, M_i, N, \cdots$ によって境界のないコンパクトで滑らかな多様体を表す。

Riemann多様体間のharmonic mapはEnergy汎関数のcritical pointとして定義される。〔Definition 1-2〕

harmonic map $f:(M,g)\to(N,h)$ に対して，f のJacobi operator $J^f:\Gamma(f^{-1}TN)\to\Gamma(f^{-1}TN)$ をEnergyの第2変分公式

$$\left.\frac{\partial^2 E(f_{s,t})}{\partial s\,\partial t}\right|_{s,t=0}=\int_M \langle J^f V, W\rangle v_g$$

によって定める。〔Proposition 1-5, Definition 1-7〕

Riemann多様体 (M,g) に対して，恒等写像 $id:(M,g)\to(M,g)$ はharmonic mapであるから，そのJacobi operator $J^{(M,g)}=J^{id}:\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$ が定まる。$J^{(M,g)}$ は

$$J^{(M,g)}V=\Delta^{id}V-\mathrm{Ric}(V)$$

で与えられ，g のみに依存する。

さらに，$J^{(M,g)}$ は $P(TM)$ 上の2階の楕円型線型共役作用素であり，その第1固有値 $\lambda_1(M,g)$ が定まる。

Mを1つ固定したときに，$J^{(M,g)}$ の第1固有値 $\lambda_1(M,g)$ は M上の metric g だけに依存して定まる。

したがって，この論文では，次の問題を考えた。

<u>Problem</u>

Mを1つ固定し，その上の metric g を変えることを考える。そのときに $\lambda_1(M,g)$ がとり得る符号の可能性は何か。

この問題に関しては，次の R.T. Smith の結果 ([Sm] Corollary 2.7) がある。

<u>Fact</u>

任意のコンパクトな等質空間 M で，$\dim M \geq 3$ ならば，$\lambda_1(M,g) < 0$ となる M上の metric g

が存在する

また $\dim M=3$ ならば，L.Z. Gao - S.T. Yau の結果〔[G.Y] Main Theorem〕より $\lambda_1(M,g)>0$ となる M上の metric g の存在がわかる。

私は，M が $\dim M=2$ で orientable ならば，Kähler 多様体であることを用いて考察することにより，$\dim M=2$ の全ての場合について，問題の答えを得た。

さらに，R.T. Smith の結果を拡張する次の結果を示すことができた。

<u>Theorem</u>

任意の M で，$\dim M \geq 3$ ならば，$\lambda_1(M,g)<0$ となる M上の metric g が存在する。

これらの結果により，問題のうち，$\dim M \leq 3$ の場合に完全な解答を与える次の Main Theorem を得た。

Main Theorem

Mに対して、$\Lambda(M) \subset \{-1, 0, 1\}$ を
$\Lambda(M) = \{\mathrm{sgn}(\lambda_1(M, g)) \mid g : \text{metric on } M\}$
で定める。このとき、次の(1)〜(4)が成立する。

(1) $\dim M = 1$ ならば、$\Lambda(M) = \{0\}$ である。

(2) $\dim M = 2$ ならば、$\Lambda(M)$ は M の Euler数 $\chi(M)$ で決まる。すなわち $\chi(M) \geq 0$ ならば $\Lambda(M) = \{0\}$ であり、$\chi(M) < 0$ ならば $\Lambda(M) = \{1\}$ である。

(3) $\dim M = 3$ ならば $\Lambda(M) = \{-1, 0, 1\}$ である。

(4) $\dim M \geq 4$ ならば $\Lambda(M) \ni -1$ である。

残念ながら、$\dim M \geq 4$ の場合に、問題に対して完全な解答を与えることができなかった。

しかし、$\dim M \geq 4$ の場合を考える過程において Jacobi operator の第1固有値 $\lambda_1(M, g)$ に関して、いくつかの結果を得た。それらは、§4 Furthur Results として

まとめておいた。
その中には、直積 Riemann 多様体に対する次の結果も含まれている。

<u>Corollary</u>
(M_i, g_i) $i=1,2$ に対して、次の式が成立する。

$$\lambda_1(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2) = \min\{\lambda_1(M_1, g_1), \lambda_1(M_2, g_2)\}$$

最後に、この論文を書くにあたって、御指導下さった落合先生、論文を書くきっかけを与えて下さった浦川先生、J.L. Kazdan 氏、その他力を借して下さった方々に深く感謝します。

§1 Preliminaries

この section では，この論文で使う記号をまとめ，harmonic map や Jacobi operator に関する定義をし，今までに知られている結果と，それらの結果の簡単な帰結について述べる。

〔Notations〕

$M, M_i, N, \cdots$ を境界のないコンパクトで滑らかな多様体とする。

$(M, g), (M_i, g_i), (N, h) \cdots$ を境界のないコンパクトで滑らかな Riemmann 多様体とする。

$f, f_i, \cdots$ を Riemann 多様体間の滑らかな写像とする。

$C^\infty(M)$ を M 上の滑らかな関数全体とする。

$TM \to M$ を M の接バンドルとする。

M が複素多様体であるとき，TM を M の

正則接バンドルとする。
写像 $f: M \to N$ と N 上のバンドル $E \to N$ が与えられたとき，$f^{-1}E$ を E の f による引き戻しとする。
$\Gamma(E)$ をバンドル $E \to M$ の滑らかな切断全体とする。
$\{e_i\}_{i=1,\cdots,\dim M}$ を (M,g) の local orthonormal frame とする。
$K^{(M,g)}$ を2次元 Riemann 多様体 (M,g) の Gauss Curvature とする。
metric に関しては，(M,g)，$X, Y \in T_pM$ $(p \in M)$ に対して，

$$\langle X, Y \rangle := g(p)(X, Y)$$

という記法も多用する。
その他の細かい Notation は [E.L] に従う。但し，曲率テンソル R の符号は [E.L] とは逆で，[K.N] の符号を採用する。すなわち

$$R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

とおく。

〔Definitions〕

この論文で扱う多様体は，特に断わらない限り，すべて，境界がなく，コンパクトで滑らかとする。写像はすべて滑らかであるとする。

以下の定義について詳しいことは，[E.L] Chapter 2,4 を参照せよ。

<u>Definition</u> 1-1

写像 $f:(M,g) \to (N,h)$ に対して，energy density of f を

$$e(f) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\dim M} h(df(e_i), df(e_i))$$

Energy of f を

$$E(f) := \int_M e(f)\, v_g$$

と定める。

Definition 1-2

写像 $f:(M,g)\to(N,h)$ が harmonic であるとは，f の滑らかな任意の variation f_t で $f_0=f$ であるものに対して，

$$\frac{d}{dt}E(f_t)\Big|_{t=0}=0$$

であることと定義する。$\tau(f)\in\Gamma(f^{-1}TN)$ を tension field of f とすると〔tension field の定義は [E.L] (2.4) を見よ〕．f が harmonic であることは，

$$\tau(f)\equiv 0$$

と同値になる。

Remark 1-3

harmonic map の例は [E.L] P15～ にいろいろ出ている。ここでは，Riemann 多様体の恒等写像 $id:(M,g)\to(M,g)$ やコンパクトな Kähler 多様体間の正則写像は harmonic map であることを注意しておく。

<u>Definition</u> 1-4

harmonic map $f:(M,g)\to(N,h)$ に対して、$\Gamma(f^{-1}TN)$ 上の2階の微分作用素である f の Jacobi operator $J^f:\Gamma(f^{-1}TN)\to\Gamma(f^{-1}TN)$ を

$$J^f V := \Delta^f V - \mathrm{trace}\, R^N(V, df)df \quad \text{for } V\in\Gamma(f^{-1}TN)$$

と定義する。ここで、$\Delta^f:\Gamma(f^{-1}TN)\to\Gamma(f^{-1}TN)$ は、∇^f を f により N 上の Levi-Civita 接続より誘導された $\Gamma(f^{-1}TN)$ 上の接続としたとき、

$$\Delta^f V := -\sum_{i=1}^{\dim M}\{\nabla^f_{e_i}\nabla^f_{e_i}V - \nabla^f_{\nabla_{e_i}e_i}V\} \quad \text{for } V\in\Gamma(f^{-1}TN)$$

とする。R^N は N の curvature tensor とする。

この Jacobi operator により harmonic map の Energy functional の第2変分公式が表される。次の Proposition の証明については、[E.L] (4.3) をみよ。

Proposition 1-5

harmonic map $f:(M,g)\to(N,h)$ に対し，$f_{s,t}$ を f の滑らかな variation で $f_{0,0}=f$ であるものとする。このとき，$V,W\in\Gamma(f^{-1}TN)$ を

$$\left.\frac{\partial f_{s,t}}{\partial s}\right|_{s,t=0}=V,\quad \left.\frac{\partial f_{s,t}}{\partial t}\right|_{t=0}=W$$

とすると，次が成立する。

$$\left.\frac{\partial^2 E(f_{s,t})}{\partial s\,\partial t}\right|_{s,t=0}$$

$$=\int_M\{\mathrm{trace}\,h(\nabla^f V,\nabla^f W)$$

$$-h(\mathrm{trace}\,R^N(V,df)df,W)\}\,v_g$$

$$=\int_M h(J^f V,W)\,v_g$$

Remark 1-6

J^f は楕円型線型共役作用素で，Δ^f は positive である。よって L^2 切断全体が成す Hilbert 空間 $L^2(f^{-1}TN)$ は，J^f の

固有空間に直交分解し，各固有空間は有限次元で滑らかな切断から成る。J^fのスペクトルは実数のdiscreteな列であり，第1固有値で下から押さえられている。

<u>Definition</u> 1-7

(1) harmonic map $f:(M,g)\to(N,h)$に対して，J^fの第1固有値をλ_1^fと表す。

(2) (M,g)に対して，その恒等写像 $id:(M,g)\to(M,g)$ の Jacobi operator を $J^{(M,g)}$ と表す。このとき，

$$J^{(M,g)}V = J^{id}V = \Delta^{id}V - \mathrm{Ric}(V)$$

である。ただし，$\mathrm{Ric}:\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$を

$$\mathrm{Ric}(V) := \sum_{i=1}^{\dim M} R(V,e_i)e_i$$

とした。

(3) (M,g)に対して $J^{(M,g)}$の第1固有値を$\lambda_1(M,g)$と表す。

一般の harmonic map に対して stability

が定義されるが、この論文では、Riemann多様体のstabilityについてだけ定義する。

<u>Definition</u> 1-8

(1) (M,g) が strongly stable であるとは、$\lambda_1(M,g)>0$ であることと定義する。
これは、任意の $V\in\Gamma(TM)$ に対し、

$$\int_M \langle J^{(M,g)}V, V\rangle \nu_g > 0$$

が成立することと同値である。

(2) (M,g) が weakly stable であるとは、$\lambda_1(M,g)\geq 0$ であることと定義する。
これは、任意の $V\in\Gamma(TM)$ に対し、

$$\int_M \langle J^{(M,g)}V, V\rangle \nu_g \geq 0$$

が成立することと同値である。

(3) (M,g) が unstable であるとは、(M,g) が weakly stable でない、すなわち $\lambda_1(M,g)<0$ であることと定義する。

これは，ある $V \in \Gamma(TM)$ が存在して

$$\int_M \langle J^{(M,g)} V, V \rangle v_g < 0$$

が成立することと同値である。

(4) M上の metric g が strongly stable (resp. weakly stable, unstable) である とは，(M,g) が strongly stable (resp. weakly stable, unstable) であることと定義する。

この論文で考える問題を定式化するときに使う $\Lambda(M)$ を定義する。

<u>Definition</u> 1-9

Mに対し，$\Lambda(M) \subset \{-1, 0, 1\}$ を

$$\Lambda(M) := \{ \mathrm{sgn}(\lambda_1(M,g)) \mid g : \text{metric on } M \}$$

と定義する。

Stability と $\Lambda(M)$ の関係は次のようになっている。

Remark 1-10

(1) $\Lambda(M) \ni -1$ であるとは，M上のmetric g が存在して，$\lambda_1(M,g) < 0$ すなわち (M,g) : unstable となることと同値である。

(2) $\Lambda(M) \ni 0$ であるとは，M上のmetric g が存在して，$\lambda_1(M,g) = 0$ となることと同値である。

(3) $\Lambda(M) \ni 1$ であるとは，M上のmetric g が存在して，$\lambda_1(M,g) > 0$ すなわち (M,g) : strongly stable となることと同値である。

Remark 1-11

[E.L] では，Mがorientableを仮定して定義等がされているが，以上のことは，Mがunorientableの場合にも定義される。Mがunorientableでも積分が定義され，Stokesの定理が成立する。〔[Wa] Chapter 4 を参照せよ〕

(Known Results and Their Consequences)

以下にこの論文で使う、今までに知られている結果と、それらの結果の簡単な帰結について述べる。

次の Theorem は Kähler 多様体間の正則写像の第2変分公式の形を与える。

<u>Theorem</u> 1-12 ([I])

(M,g), (N,h) を Kähler 多様体とし、$f:(M,g)\to(N,h)$ を正則写像とする。このとき、次の式が成り立つ

$$\int_M h(J^f V, V)\, v_g = \frac{1}{2}\int_M \operatorname{trace} h(DV, DV)\, v_g$$

for $V \in \Gamma(f^{-1}TN)$

ここで、$D:\Gamma(f^{-1}TN)\to\Gamma(T^*M\otimes f^{-1}TN)$ を J^M, J^N をそれぞれ M, N の almost complex structure として、

$$DV(X) := \nabla^f_{J^M X} V - J^N \nabla^f_X V$$

とした。

このTheoremより、次が従う。

<u>Corollary</u> 1-13 ([U1] p33)
(M,g), (N,h) をKähler多様体, $f:(M,g)\to(N,h)$ を正則写像, $id:(M,g)\to(M,g)$ を (M,g) の恒等写像とする。このとき、次の(1)〜(4)が成立する。

(1) $\lambda_1^f \geq 0$

(2) $Ker(J^f) \subset \Gamma(f^{-1}TN)$ を

$$Ker(J^f) = \{V \in \Gamma(f^{-1}TN) \mid J^f V = 0\}$$

とし、$H^0(M, f^{-1}TN)$ を $f^{-1}TN$ の正則切断の全体とすると、$\mathbb{R}$-線型空間としての同型

$$Ker(J^f) \cong H^0(M, f^{-1}TN)$$

が成立する

(3) (M,g) に対して、$H^0(M, TM)$ を正則ベクトル場の全体とすると $\mathbb{R}$ 線型空間としての同型

$$\mathrm{Ker}(J^{(M,g)}) \cong H^0(M, \mathbb{T}M)$$

が成立し，その対応は，

$$\mathrm{Ker}(J^{(M,g)}) \ni V \longmapsto \frac{1}{2}(V - \sqrt{-1}J^M V) \in H^0(M, TM)$$

で与えられる。

(4) $H^0(M, \mathbb{T}M) = \{0\}$ であることと $\lambda_1(M, g) > 0$ であることは同値である。

$\dim M = 2$ のとき，M が orientable ならば任意の M 上の metric g に対して，M の orientation を適当に決め，orientation と g に compatible な complex structure を M に入れれば，(M, g) は Kähler 多様体である。次の Fact 1-14 の各2次元 Riemann 多様体は，そのようにして Kähler 多様体とみている。2次元 Kähler 多様体の正則ベクトル場がどのようになっているかの次の結果はよく知られている。

Fact 1-14

(1) 2次元球面 (S^2, g_0) で $K^{(S^2,g_0)} \equiv 1$ となるものに対して、

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(S^2, \mathbb{T}S^2) = 3$$

である。$S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と思ったとき、$H^0(S^2, \mathbb{T}S^2)$ の基底は、$\mathbb{C}$の座標を z として、

$$\frac{\partial}{\partial z}, z\frac{\partial}{\partial z}, z^2\frac{\partial}{\partial z}$$

で与えられる。

(2) 2次元トーラス (T^2, g_0) で、$K^{(T^2,g_0)} \equiv 0$ となるものに対して、

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(T^2, \mathbb{T}T^2) = 1$$

である。$(\mathbb{R}^2, \overline{g_0})$ を 2次元ユークリッド空間に standard な metric を入れたものとする。$\pi : (\mathbb{R}^2, \overline{g_0}) \to (T^2, g_0)$ を universal covering map とし、$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ とすると、$H^0(T^2, \mathbb{T}T^2)$ のある基底をリフトしたものとして、

$$\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}$$

が与えられる。

(3) (M, g) が2次元の Kähler 多様体で、$\chi(M) < 0$ であれば、

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(M, \mathbb{T}M) = 0$$

である。

次は2次元の Riemann 多様体は、その metric を conformal に動かせば、constant curvature にできるという結果である。

<u>Theorem</u> 1-15 〔[K.W]〕

(M, g) を必ずしも orientable でない2次元 Riemann 多様体とする。このとき次の(1)〜(3)が成立する。

(1) $\chi(M) > 0$ ならば、$\rho \in C^\infty(M)$ で、$\rho > 0$ on M となるものが存在して、

$$K^{(M, \rho g)} \equiv 1$$

(2) $\chi(M)=0$ ならば、$\rho\in C^\infty(M)$ で
$\rho>0$ on M となるものが存在して、
$$K^{(M,\rho g)}\equiv 0$$
となる。
(3) $\chi(M)<0$ ならば、$\rho\in C^\infty(M)$ で
$\rho>0$ on M となるものが存在して、
$$K^{(M,\rho g)}\equiv -1$$
となる。

2次元の定曲率空間の分類の結果も述べておく。これは [Wo] Theorem 2.5.1 と Proposition 2.5.9 より従う。

<u>Theorem</u> 1-16
(1) 2次元射影平面 $(\mathbb{R}P^2, g_0)$ で $K^{(\mathbb{R}P^2, g_0)}\equiv 1$ となるものは、すべて互いに isometric である。
(2) Klein bottle の isometry classes は、

$(2b, a) \in (\mathbb{R}^+)^2$

で parametrize される。

もう少し詳しく言うと次のようになる。

$O(2)$ を2次元直交群として, $\alpha \in O(2)$

$\mathbb{a} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\mathbb{R}^2$ の運動群 $E(2)$

の元 $\gamma = (\alpha, t_{\mathbb{a}})$ を

$$\gamma(\mathbb{x}) := \alpha(\mathbb{x}) + \mathbb{a} \quad \text{for } \mathbb{x} \in \mathbb{R}^2$$

で定める。$I, B \in O(2)$ を

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とする。

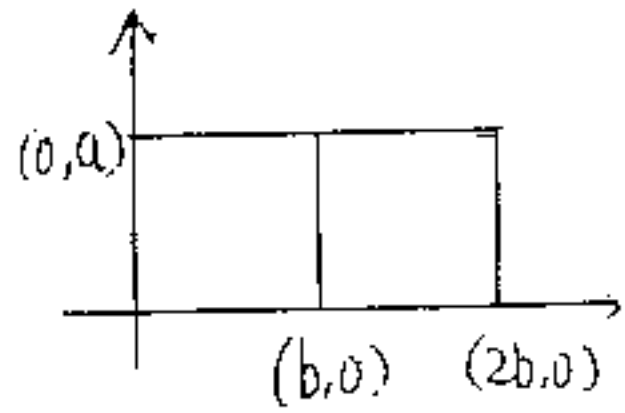
このとき, $(2b, a)$ に対応する isometry class の代表元として,

$$(\mathbb{R}^2, g_0) / \langle (B, t_{(b,0)}), (I, t_{(0,a)}) \rangle$$

がとれる。ここで, g_0 は $\mathbb{R}^2$ の standard な metric で, $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ は, $E(2)$ の元 γ_1, γ_2 で生成される $E(2)$ の部分群である。

上の代表元の orientable double

covering として、トーラス
$(\mathbb{R}^2, g_0)/\langle (I, t_{(2b,0)}), (I, t_{(0,a)}) \rangle$
がとれる。



次のTheoremは L.Z. Gao - S.T. Yau の任意のコンパクト3次元多様体には negative Ricci curvature をもつ metric が存在するという結果〔[G.Y]〕と Definition 1-7(2) の $J^{(M,g)}$ の定義より直ちに従う。

<u>Theorem</u> 1-17
$\dim M = 3$ ならば、M上の metric g が存在して、$\lambda_1(M,g) > 0$ すなわち (M,g) は strongly stable となる。

次のTheoremは B. Whiteの[Wh] Theorem 3より従う。

<u>Theorem</u> 1-18
$\pi_1(M)=\pi_2(M)=0$ となる (M,g) に対して、恒等写像 $id:(M,g)\to(M,g)$ は、$E(f)$ がいくらでも小さい写像 $f:(M,g)\to(M,g)$ と homotopic である。

次の Theorem はコンパクトな対称空間の Stability についてまとめたものである。

<u>Theorem</u> 1-19 ([Oh], [U2])
(M,g) を連結かつ単連結で、既約なコンパクト Riemann 対称空間とする。
(M,g) が unstable であれば、(M,g) は、次の(1)〜(7)のいずれかに対称空間としての metric を入れたものである。
(1) S^n $(n\geq 3)$

(2) $G_{p,q}(\mathbb{H}) = Sp(p+q)/Sp(p)\times Sp(q)$
$(p \geq q \geq 1)$
(3) $P^2(Cay) = F_4/Spin(9)$
(4) E_6/F_4
(5) $SU(2p+2)/Sp(p+1)$ $(p\geq 2)$
(6) $SU(p+1)$ $(p\geq 2)$
(7) $Sp(p)$ $(p\geq 2)$

等質空間に関しては，次のR.T.Smithの結果が知られている。

<u>Theorem</u> 1-20 ([Sm])
(M,g)がコンパクトな等質空間で，$\dim M \geq 3$であれば，M上のmetric g'が存在して，$\lambda_1(M,g') < 0$，すなわち(M,g')はunstableとなる。

最後に，Jacobi operatorの第1固有値の連続性を述べておく。これは，小平-D.C.Spencerの結果([K.S])より

従う。〔c.f. [K1] Theorem 7.2〕

<u>Theorem</u> 1-21
$\{g_t\}$を M上の metric の滑らかな族とすると $\lambda_1(M, g_t)$ は t に関して連続である。

§2 Problems and Results

このsectionでは，まずこの論文で考える問題をあげた。
次にそれらの問題の答えとして得られた結果をまとめて述べた。それらの結果のうちMain Theoremの証明については，別に§3を設け，そこで与えた。
そして，最後にそれらの結果を踏まえて，これから考えるべき問題や，展開する方向を述べた。

〔Problems〕

この論文のもとになる問題は，昭和61年3月25日～28日に，京都大学数理解析研究所で行われたシンポジウム"リーマン幾何学の解析的手法による研究"における浦川肇先生の講義"Survey in harmonic mappings"で得られた。私は，そこで2つの問題に興味を

持った。その1つは，J.L. Kazdan氏が質問された次の問題であった。([U1] P46 問題6)

<u>Problem</u> 2-1

M上の metrics g_1, g_2 が存在して，(M, g_1) が weakly stable であり，(M, g_2) が unstable であるような M は存在するか。

もう1つは，浦川先生が出された次の問題であった。([U1] p43 問題3)

<u>Problem</u> 2-2

$\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_s, \mathfrak{M}_u$ を以下の式で定める。

$\mathfrak{M} :=$ コンパクトな Riemann 多様体の等長類の全体.

$\mathfrak{M}_s := \{ [(M,g)] \in \mathfrak{M} \mid (M,g) : \text{weakly stable} \}$

$\mathfrak{M}_u := \{ [(M,g)] \in \mathfrak{M} \mid (M,g) : \text{unstable} \}$

このとき，$\mathfrak{M}_s$ または $\mathfrak{M}_u$ を決定せよ。

これらの問題に関連して，B. White の結果 Theorem 1-18 に注意すると，次のような問題も考えられる。

<u>Problem</u> 2-3

M が

$$\pi_1(M) = \pi_2(M) = 0$$

をみたせば，M 上の任意の metric g に対して $\lambda_1(M, g) < 0$ であるか。すなわち上の式をみたす M に対して，$\Lambda(M) = \{-1\}$ であるか。

Problem 2-1 ~ 2-3 を考えるうちに，次のように考えるに至った。一般に M を1つ固定したときに，weakly stable あるいは unstable な metric が入るかどうかがわかったら面白いのではないか。そのことを Definition 1-9 で定義した $\Lambda(M)$ を使って，定式化したのが次の問題である

Problem 2-4

Mを1つ固定した時に，$\Lambda(M)$は何か。

〔Results〕

これから，Problem 2-1, 2-2, 2-4 の答えを述べていく。Problem 2-2 は問題が一般的すぎたため，答えを得ることができなかった。むしろ，他の具体的な問題を考えるきっかけになった。

Problem 2-1 の答え

そのような M は存在し，答えは Yes である。いくつか方法があるが，今まで知られている結果から存在をいうには，次のようにする。

weakly stable な 3次元以上の homogeneous space をとる。Theorem 1-19 より，例えば，($\mathbb{C}P^n$, Fubini-Study metric) $n \geq 2$ をとればよい。これには，Theorem 1-20 より，unstable な metric がある。

あるいは，unstable な3次元のコンパクトな Riemann 多様体をとる。Theorem 1-19 より例えば，(S^3, standard metric) をとればよい。これには Theorem 1-17 より strongly stable な metric が入る。

私の結果を使うならば，任意の weakly stable な3次元以上のコンパクトな Riemann 多様体をとってくればよい。その多様体には，Theorem 3-2 より unstable な metric が入る。

ただし，$\dim M=2$ ならば，Corollary 1-13 (1) と Theorem 4-2 より，どんな metric を入れても，その metric は weakly stable である。

実は，Problem 2-2 は Theorem 4-6 に注意すれば，$\Lambda(M)\supset\{-1,0\}$ となる M が存在するか という問題と同値である。

故に，Problem 2-2 は，Problem 2-4 によって一般化されている。したがって Main Theorem

によっても，Mの存在がわかる。例えば任意のコンパクトな3次元以上の多様体には，必ずweakly stableなmetricとunstableなmetricが入る。

Problem 4-3の答え

答えはNoである。

例えば，3次元球面S^3は，$\pi_1(S^3)=\pi_2(S^3)=0$を満たすが，Theorem 1-17より，S^3上にはstrongly stableなmetricが入る。

Problem 4-4の答え

Problem 4-4の答えが次のMain Theoremである。

Main Theorem

Mに対して，次の(1)〜(4)が成立する。

(1) $\dim M=1$ ならば，$\Lambda(M)=\{0\}$である。

(2) $\dim M=2$ ならば，$\Lambda(M)$はMのEuler数

$\chi(M)$で決まる。すなわち $\chi(M) \geq 0$ ならば $\Lambda(M) = \{0\}$ であり，$\chi(M) < 0$ ならば $\Lambda(M) = \{1\}$ である。

(3) $\dim M = 3$ ならば，$\Lambda(M) = \{-1, 0, 1\}$である。

(4) $\dim M \geq 4$ ならば，$\Lambda(M) \ni -1$ である。

〔Open Problems〕

ここから，以上の結果を踏まえて，考えるべき問題や，展開する方向を考えてみる。

まず，Main Theoremで残った部分を問題にする。

<u>Problem</u> 2-5

$\dim M \geq 4$ となる一般のMに対して，M上のmetric g で $\lambda_1(M, g) > 0$ となるものが存在するか。

これが一般的すぎるなら，Mを限定して，次の問題を考えたら面白いと思う。

Problem 2-6

n次元球面 S^n $(n \geq 4)$ に対して，S^n上の metric g で $\lambda_1(S^n, g) > 0$ となるものが存在するか。

更に，Problem 2-1，2-2 に答えを出すためにも，次の問題を考えたら，面白いと思う。

Problem 2-7

(M_i, g_i) $i=1,2$ を strongly stable な Riemann 多様体とする。このとき，connected sum $M_1 \# M_2$ に strongly stable な metric は存在するか。

この論文では，$\lambda_1(M, g)$ の符号しか考えなかった。それは，metric を定数倍することにより，Jacobi operator の第1固有値を定数倍することができるからである。すなわち，$\alpha > 0$ として，(M, g) に対して，次の式が成り立つ。

$$\lambda_1(M, \alpha g) = \frac{1}{\alpha} \lambda_1(M, g)$$

そこで上のことに注意しながら Mに対して $\Lambda(M) \subset \mathbb{R}$ を次の式で定める。

$$\Lambda(M) = \{\lambda_1(M, g) \mid g : \text{metric on } M \text{ with unit volume}\}$$

Main Theorem を この $\Lambda(M)$ を使って次の問題に展開すると，面白いと思う。

<u>Problem</u> 2-8

Mを1つ固定したとき，$\Lambda(M)$ は何か。

この論文では Mが コンパクトな多様体のときしか考えなかった。そこで 以上のことが非コンパクトの 場合 どのように拡張されるかを考えても面白いと思う。

§3 Proof of Main Theorem

このsectionでは Main Theoremの証明を行う。$\dim M=1$, $\dim M=2$, $\dim M\geq 3$の各場合に分けて証明する。

〔(1) $\dim M=1$ の場合〕

1次元のコンパクトな多様体Mは，常に1次元球面 S^1 と微分同相である。canonical immersion $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ より誘導される S^1 上のmetricを g_0 とすると，任意の $\alpha>0$ に対して，$\lambda_1(S^1, \alpha g_0)=0$ となる。一方，Mに勝手なmetric g を入れると $\alpha>0$ が存在して，(M,g) と $(S^1, \alpha g_0)$ は isometric となる。よって $\lambda_1(M,g)=\lambda_1(S^1,\alpha g_0)=0$ となり，$\Lambda(M)=\{0\}$ がわかる。

〔(2) $\dim M = 2$ の場合〕

Mがorientableとunorientableの場合に分けて証明する。

<u>Mがorientableの場合</u>

Mのorientationを1つ決めておく。任意にM上のmetric g をとってきて固定する。Mのorientationとmetric g にcompatibleなcomplex structureをMに入れれば、Mは Kähler多様体となる。よってCorollary 1-13(4)より、$H^0(M, TM)$ を調べればよい。

$\chi(M) < 0$ の場合は、Fact 1-14(3)より $\dim H^0(M, TM) = 0$ となり、$\lambda_1(M, g) > 0$ となる。

$\chi(M) \geq 0$ の場合は、$\chi(M) > 0$ ならば、2次元球面 S^2 に、$\chi(M) = 0$ ならば、2次元Torus T^2 に微分同相である。よって、Uniformizing Theorem より、$\chi(M) > 0$ ならば、(M, g) は Fact 1-14(1)の (S^2, g_0)

と biholomorphic である。同様に、$\chi(M)=0$ ならば、(M,g) は Fact 1-14 (2) の (T^2, g_0) の1つに biholomorphic である。どちらにしろ $\chi(M) \geq 0$ のとき、Fact 1-14 (1)(2) より $\dim_{\mathbb{C}} H^0(M, TM) > 0$ がわかり、$\lambda_1(M,g)=0$ となる。

$\chi(M) > 0$ ならば、M にどんな metric g を入れても、$\lambda_1(M,g) > 0$ となり、$\chi(M) \geq 0$ ならば、M にどんな metric g を入れても $\lambda_1(M,g)=0$ となることがわかった。

これにより Main Theorem (2) の M が orientable の場合が従う。

M: unorientable の場合

M は unorientable とする。M 上の metric g を1つとって固定する。(M,g) の orientable な Riemannian covering で double covering になっている $(\tilde{M}, \tilde{g})$ をとる。(cf. Definition 4-1) $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$ を Riemannian covering map とする。

(I) $\chi(M)<0$ の場合

$\chi(\hat{M})<0$ であるから，Theorem 4-2 と上の orientable の場合の結果より，

$$\lambda_1(M,g) \geq \lambda_1(\hat{M},\hat{g}) > 0$$

がわかる。これにより $\Lambda(M)=\{1\}$ がわかった。

(II) $\chi(M)\geq 0$ の場合

このとき M は，$\chi(M)>0$ ならば 2次元射影平面 $\mathbb{R}P^2$ と，$\chi(M)=0$ ならば，Klein bottle K^2 と微分同相である。

どちらの場合にも，$\mathrm{Ker}(J^{(M,g)})$ の元で (M,g) まで落ちるものがあることを用いて $\mathrm{Ker}(J^{(M,g)})\neq 0$ であることを示す。

一方，$(\hat{M},\hat{g})$ は Kähler 多様体であるから Corollary 1-13 (1) と Theorem 4-2 により，

$$\lambda_1(M,g) \geq \lambda_1(\hat{M},\hat{g}) \geq 0$$

である。

$\mathrm{Ker}(J^{(M,g)})\neq 0$ より，$\lambda_1(M,g)\leq 0$ であるから，合わせて $\lambda_1(M,g)=0$ がわかる。

$\mathrm{Ker}(J^{(M,\hat{g})})$ の元が，(M,g) まで落ちるということを詳しく説明すると次のようになる。

Covering map $\pi:(\hat{M},\hat{g})\to(M,g)$ に対応して，$(\hat{M},\hat{g})$ の isometry で，order 2 の元 γ がある。$\mathrm{Ker}(J^{(M,\hat{g})})$ の元 $\hat{X}$ で，$\hat{X}\neq 0$，γ-invariant なものが存在すれば，π は locally isometric であるから，$X\in\Gamma(TM)$ の元で，$X=\pi_*\hat{X}$ となるものをとれば，$0\neq X\in\mathrm{Ker}(J^{(M,g)})$ となる。

$\mathrm{Ker}(J^{(M,\hat{g})})$ の元で γ-invariant なものが存在することを，2次元射影平面と Klein bottle の場合に分けて示す。

(a) $\chi(M)>0$ の場合

M は 2次元射影平面 $\mathbb{R}P^2$ と微分同相である。Theorem 1-15 (1) より g と conformal な metric g_0 が存在して，$K^{(M,g_0)}\equiv 1$ となる。

2次元球面 S^2 上の metric $\hat{g}_0$ を canonical immersion $S^2\hookrightarrow\mathbb{R}^2$ から誘導された metric とし，$\gamma_0:(S^2,\hat{g}_0)\to(S^2,\hat{g}_0)$ を anti-podal

mapとする。

このとき、Theorem 1-16 (1)より、(M, g_0)は、$(S^2, \tilde{g}_0)$をγ_0で割ったものと思ってよい。covering mapを$\pi : S^2 \to M$とする。

S^2上のmetric $\tilde{g}$を$\tilde{g} = \pi^* g$で決める。

さらに、metricを考えなければ同等写像である共形微分同相写像$\tilde{f} : (S^2, \tilde{g}) \to (S^2, \tilde{g}_0)$と$f : (M, g) \to (M, g_0)$を、

$$y = \tilde{f}(y) \qquad \text{for } y \in S^2$$
$$x = f(x) \qquad \text{for } x \in M$$

で定める。

$\gamma : (S^2, \tilde{g}) \to (S^2, \tilde{g})$を$\gamma = \tilde{f}^{-1} \circ \gamma_0 \circ \tilde{f}$とおけば、次の可換図式ができる。

$$\begin{tikzcd}
(S^2, \tilde{g}) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi"] \arrow[loop left, "\gamma"] & (S^2, \tilde{g}_0) \arrow[d, "\pi"] \arrow[loop right, "\gamma_0"] \\
(M, g) \arrow[r, "f"] & (M, g_0)
\end{tikzcd}$$

$\tilde{f} : (S^2, \tilde{g}) \to (S^2, \tilde{g}_0)$は共形微分

同相であるから、$(S^2, \hat{g})$ と $(S^2, \hat{g}_0)$ に同じ向きを入れておけば、Kähler 多様体間の双正則写像になっている。

さらに、Corollary 3-2(3) をみれば、holomorphic vector field と $\mathrm{Ker}(J^{(M,g)})$ の元との対応のさせ方は、almost complex structure だけによっている。

したがって

$$f_*(\mathrm{Ker}(J^{(S^2,\hat{g})})) = \mathrm{Ker}(J^{(S^2,\hat{g}_0)})$$

となる。

故に、$\mathrm{Ker}(J^{(S^2,\hat{g})})$ の元で、γ-invariant な元があるためには、$\mathrm{Ker}(J^{(S^2,\hat{g}_0)})$ の元で、anti-podal map γ_0 で invariant な元が存在すればよい。

2次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ に Standard metric を入れたものを $(\mathbb{R}^2, \bar{g}_0)$ とする。$p : (S^2, \hat{g}_0) \setminus \{\text{a point}\} \to (\mathbb{R}^2, \bar{g}_0)$ を立体射影とする。

このとき、Fact 1-14(1) と Corollary 1-13(3) より $p_*(\mathrm{Ker}(J^{(S^2,\hat{g}_0)}))$ の基底は、次の

$X_1 \sim X_6$ である。

$$X_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$X_3(x,y) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4(x,y) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

$$X_5(x,y) = (x^2-y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}$$

$$X_6(x,y) = -2xy\frac{\partial}{\partial x} + (x^2-y^2)\frac{\partial}{\partial y}$$

$\bar{\gamma} : (\mathbb{R}^2, \bar{g}_0) \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \bar{g}_0) \setminus \{(0,0)\}$ を $\bar{\gamma} = p \cdot \gamma_0 \cdot p^{-1}$ とおけば、簡単な計算により、次の式を得る。

$$\bar{\gamma}_*(X_1) = X_5, \quad \bar{\gamma}_*(X_2) = -X_6$$
$$\bar{\gamma}_*(X_3) = -X_3, \quad \bar{\gamma}_*(X_4) = X_4$$
$$\bar{\gamma}_*(X_5) = X_1, \quad \bar{\gamma}_*(X_6) = -X_2$$

よって、X_4 は $p_\#(\mathrm{Ker}(J^{(S^2,\bar{g}_0)}))$ に含まれ anti-podal map で invariant である。

故に、$(p^{-1})_*(X_4)$ に対応する $X \in \Gamma(TS^2)$ をとれば、$X \in \mathrm{Ker}(J^{(S^2,\bar{g}_0)})$ で γ_0-invariant である。

(b) $\chi(M)=0$ の場合

Mは Klein bottle K^2と微分同相である。この場合も、(a)の場合と全く同様にして、Theorem 1-15(2), Theorem 1-16 (2), Corollary 1-13を用いて、

$$(T^2, \bar{g}_0) = (\mathbb{R}^2, \bar{g}_0) / \langle (I, t_{(2b,0)}), (I, (t_{(0,a)})) \rangle$$

としたとき、$\mathrm{Ker}(J^{(T^2,\bar{g}_0)})$ の元で、γ_0-invariantなものは存在するかという問題に帰着する。ここで、γ_0は、$(\mathbb{R}^2, \bar{g}_0)$ の isometry $(B, t_{(b,0)})$ を $(T^2, \bar{g}_0)$ に落としたものである。

$\pi : (\mathbb{R}^2, \bar{g}_0) \to (T^2, \bar{g}_0)$ を Riemannian covering map とし、$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ としたとき、$\pi_*(\frac{\partial}{\partial x}) \in \Gamma(TT^2)$ は $\mathrm{Ker}(J^{(T^2,\bar{g}_0)})$ の元で、γ_0-invariantである。

よって、この場合にも、M上のmetric gを任意にとってきたとき、

$$\lambda_1(M, g) = 0$$

となることがわかる。

以上で、Main Theorem (2), $\dim M = 2$ のすべての場合について証明された。

((3),(4) $\dim M \geq 3$ の場合)

最初に Lemma として，ユークリッド空間の球の上に unstable な metric を構成する。
その Lemma を用いて，$\dim M \geq 3$ ならば M 上に unstable な metric が存在するという Theorem 3-2 を示す。
最後に，その Theorem 3-2 と，今までにわかっている結果を組み合わせて Main Theorem (3),(4) の場合を証明する。
Lemma のためにいくつか記号を用意する。
n 次元ユークリッド空間に standard metric を入れたものを $(\mathbb{R}^n, \bar{g}_0)$ とする。$\mathbb{R}^n$ の原点を中心とする半径 L の球を $B^n(L)$ とする。$B^n(L)$ 上の metric g_0 を $g_0 = \bar{g}_0|_{B^n(L)}$ とする。
$\rho \in C^\infty(B^n(L))$ に対して，$B^n(L)$ 上の metric g_1 を $g_1 = e^{2\rho} g_0$ とする。metric g_1 から定まる Levi-Civita connection, Jacobi operator, curvature 等には ′ をつけて，

metric g_0 から定まるものには，何もつけないであらわす。

<u>Lemma</u> 3-1

整数 $n \geq 3$ に対して，$L = L(n) > 0$ が存在して，次をみたす。

$B^n(L)$ に compact support をもつ $\rho \in C^\infty(B^n(L))$ と $Z \in \Gamma(TB^n(L))$ が存在して，$g_1 = e^{2\rho} g_0$ とするとき，次の式が成立する。

$$\int_{B^n(L)} \langle J'Z, Z \rangle dv'$$

$$= \int_{B^n(L)} \{ \mathrm{trace}' \langle \nabla' Z, \nabla' Z \rangle - \mathrm{Ric}'(Z,Z) \} dv'$$

$$< 0$$

<proof of Lemma 3-1>

$Z = \mathrm{grad}\, \rho$ ととり，Theorem 4-8 (6) を使って計算すると以下の式が成立する。

$$(3.1.1)\quad \int_{B^n(L)} \{ \mathrm{trace}'\langle \nabla' Z, \nabla' Z\rangle' - \mathrm{Ric}'(Z,Z)\} dv'$$

$$= \int_{B^n(L)} \{ \mathrm{trace}\,\langle \nabla\, \mathrm{grad}\rho, \nabla\, \mathrm{grad}\rho\rangle - 2n|\mathrm{grad}\rho|^2$$

$$+ (n-8)(\nabla d\rho)(\mathrm{grad}\rho, \mathrm{grad}\rho)\} e^{n\rho}\, dv$$

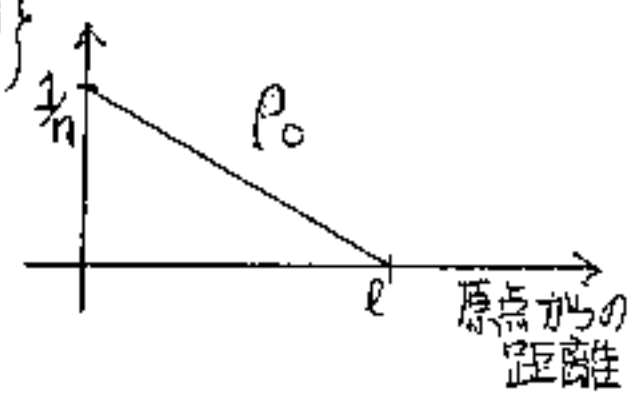
ここで、$\mathrm{grad}\rho$ は g_0 に関する ρ の gradient vector で、$|\mathrm{grad}\rho|^2 = \langle \mathrm{grad}\rho, \mathrm{grad}\rho\rangle$ である。

ρ をうまくとり、この積分を負にする。

後で決める定数 $\ell \geq 4$ をとり、$L = 2\ell$ とおく。

$B^n(L)$ 上の Lipschitz 関数 ρ_0 を

$$\rho_0(x) = \max\left\{\frac{1}{n}\left(1 - \frac{|x|}{\ell}\right), 0\right\}$$



ととる。

この ρ_0 で、だいたいの計算をして、後から滑らかにした時の誤差の評価をする。

$B^n(L) = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x| < L\}$ である。

この座標で ρ_0 の gradient や Hessian を計算すると次のようになる。

$$\mathrm{grad}\,\rho_0(x)\begin{cases} = -\dfrac{1}{n\ell}\dfrac{x}{|x|} & x \in B^n(\ell) \\ = 0 & x \notin B^n(\ell) \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{grad}\,\rho_0(x)\begin{cases} = -\dfrac{1}{n\ell}\left\{\dfrac{e_i}{|x|} - \dfrac{x_i x}{|x|^3}\right\} & x \in B^n(\ell) \\ = 0 & x \notin B^n(\ell) \end{cases}$$

ここで、e_i は i 番目の成分ベクトル $(0,\cdots,0,\overset{i}{1},0\cdots 0)$ とした。

この式により、積分する各項を計算すると次のようになる。

$$\mathrm{trace}\langle \nabla\mathrm{grad}\,\rho_0, \nabla\mathrm{grad}\,\rho_0\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{grad}\,\rho, \frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{grad}\,\rho\right\rangle$$

$$= \frac{n-1}{n^2\ell^2}\cdot\frac{1}{|x|^2}$$

$$2n\,|\mathrm{grad}\,\rho_0|^2 = \frac{2}{n\ell^2}$$

$$\nabla d\rho_0(\mathrm{grad}\,\rho_0, \mathrm{grad}\,\rho_0) = 0$$

よって、積分の各項は、$r=|x|$ として、次のように計算される。

$$\int_{B^n(\ell)} \mathrm{trace}\langle \nabla \mathrm{grad}\rho_0, \nabla \mathrm{grad}\rho_0\rangle \, dv'$$

$$\leq \int_{B^n(\ell)} \mathrm{trace}\langle \nabla \mathrm{grad}\rho_0, \nabla \mathrm{grad}\rho_0\rangle \, dv \times e$$

$$= \int_0^{\ell} \frac{n-1}{n^2\ell^2} \cdot r^{n-3} \cdot n\omega_n e \; dr$$

$$= \frac{(n-1)\omega_n e}{n(n-2)} \cdot \ell^{n-4} = C_1(n)\, \ell^{n-4}$$

$$\int_{B^n(\ell)} 2n \cdot |\mathrm{grad}\rho_0|^2 dv' \geq \frac{2}{n\ell^2} \int_{B^n(\ell)} dv$$

$$= \frac{2\omega_n}{n} \ell^{n-2} = C_2(n)\, \ell^{n-2}$$

ここで, $C_i(n)$ $i=1,2$, は n だけに依存する定数である。以下も同様である。

よって, この ρ_0 に対して, (3.1.1) の積分は, ℓ を十分大きくとれば, ℓ^{n-2} の order で負になる。すなわち $\ell_0 > 0$ と $C_3(n) > 0$ が存在して,

$$(3.1.2) \int_{B^n(2\ell)} \{ \mathrm{trace}\langle \nabla \mathrm{grad}\rho_0, \nabla \mathrm{grad}\rho_0\rangle - 2n|\mathrm{grad}\rho_0|^2$$

$$+ (n-8)(\nabla d\rho_0)(\mathrm{grad}\,\rho_0, \mathrm{grad}\,\rho_0)\Big\} e^{n\rho_0} dv$$

$$\leq -C_3(n)\, \ell^{n-2} \qquad \text{for } \ell \geq \ell_0$$

が成り立つ。

次に、ρ_0を滑らかにしたものをρとして、ρ_0の場合の積分と、ρの場合の積分との誤差を評価する。

$\rho \in C^\infty(B^n(2\ell))$ を次のようにとる。

(a) $\rho(x)$は $|x|$だけで決まる。$0 \leq \rho \leq \frac{1}{n}$

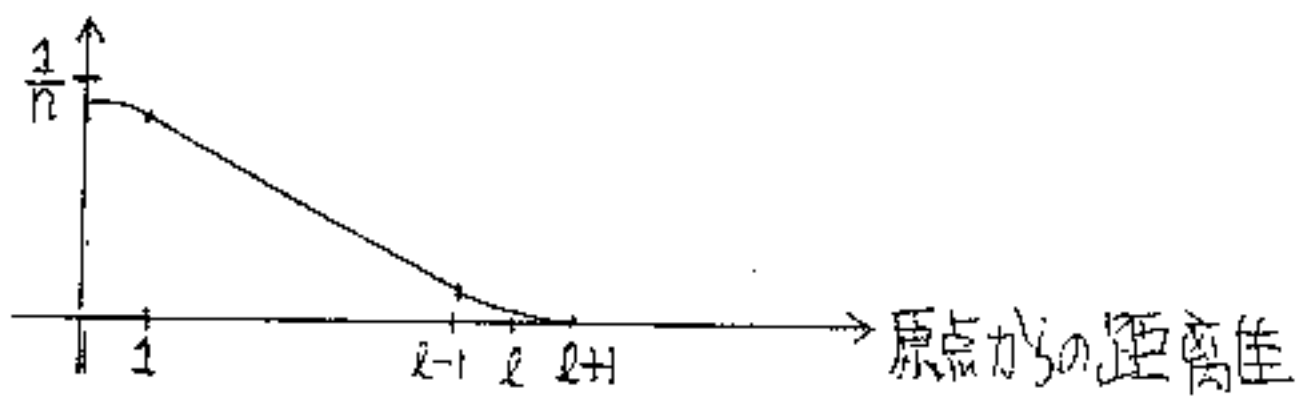
(b) $\rho(x) = \rho_0(x) \qquad \text{for } x \in B^n(\ell-1) \setminus B^n(1)$

(c) $\rho(x) = 0 \qquad \text{for } x \in B^n(2\ell) \setminus B^n(\ell+1)$

(d) $|\mathrm{grad}\,\rho| \leq \dfrac{C_4(n)}{\ell} \qquad \text{for } x \in B^n(1) \cup (B^n(\ell+1) \setminus B^n(\ell-1))$

(e) $\left|\dfrac{\partial}{\partial x_i} \mathrm{grad}\,\rho\right| \leq \dfrac{C_5(n)}{\ell} \qquad \text{for } x \in B^n(1) \cup (B^n(\ell+1) \setminus B^n(\ell-1))$

$i = 1, \cdots, n$



ρ_0 と ρ が異なるのは、$B^n(1) \cup (B^n(\ell+1) \setminus B^n(\ell-1))$ 上である。積分される各項で、正の値をとり得るのは、$\mathrm{trace}\langle \nabla \mathrm{grad}\rho, \nabla \mathrm{grad}\rho \rangle$ と、$(n-8)(\nabla d\rho)(\mathrm{grad}\rho, \mathrm{grad}\rho)$ である。

それらの $B^n(1)$ と $B^n(\ell+1) \setminus B^n(\ell-1)$ 上での積分を ρ の決め方から評価する。

$B^n(1)$ 上では、

$$\int_{B^n(1)} \mathrm{trace}\langle \nabla \mathrm{grad}\rho, \nabla \mathrm{grad}\rho \rangle dv' \leq \frac{C_6(n)}{\ell^2}$$

$$\int_{B^n(1)} (\nabla d\rho)(\mathrm{grad}\rho, \mathrm{grad}\rho)\, dv' \leq \frac{C_7(n)}{\ell^3}$$

となる。

$B^n(\ell+1) \setminus B^n(\ell-1)$ 上では、

$$\int_{B^n(\ell+1) \setminus B^n(\ell-1)} dv \leq C_8(n)\, \ell^{n-1}$$

に注意すれば、

$$\int_{B^n(\ell+1) \setminus B^n(\ell-1)} \mathrm{trace}\langle \nabla \mathrm{grad}\rho, \nabla \mathrm{grad}\rho \rangle dv' \leq C_9(n)\, \ell^{n-3}$$

$$\int_{B^n(\ell+1) \setminus B^n(\ell-1)} (\nabla d\rho)(\mathrm{grad}\rho, \mathrm{grad}\rho)\, dv' \leq C_0(n)\, \ell^{n-4}$$

となる。

したがって，ρ_0の場合の積分と，ρの場合の積分の誤差は，ℓを大きくしていった時，ℓ^{n-3}のorderで押さえられる。

故に，(3.1.2)と合わせて，ℓを十分大きくとることにより，$L=2\ell$，$B^n(L)$，ρ，$Z=\mathrm{grad}\,\rho$は求めるものとなる。 ∎

<u>Theorem</u> 3-2

$\dim M \geq 3$ ならば，M上のmetric gが存在して，$\lambda_1(M,g)<0$ となる。

<proof of Theorem 3-2>

$n=\dim M$ として，Lemma 3-1で構成した $(B^n(L), e^{2\rho}g_0)$ をMの適当な座標近傍に埋め込む。$e^{2\rho}g_0$ をM上に滑らかに拡張したものをgとする。このとき，$\lambda_1(M,g)<0$ がわかる。それは，Zを埋め込んだ$B^n(L)$の外で0として，$\Gamma(TM)$の元$\mathfrak{X}$に拡張してやれば，Lemma 3-1より

$$\int_M \langle J\hat{z}, \hat{z} \rangle \, dv < 0$$

となるからである。 ∎

Main Theorem の証明に戻る。

$\dim M \geq 3$ とする。Theorem 3-2 より

$$\Lambda(M) \ni -1$$

である。

$\dim M = 3$ であるときには Theorem 1-17 より、

$$\Lambda(M) \ni 1$$

であるから、上の2つの式と Corollary 4-7 より、

$$\Lambda(M) = \{-1, 0, 1\}$$

となる。

これにより、Main Theorem のすべての場合の証明が終った。

§4 Furthur Results

このsectionでは、harmonic map, 特にRiemann多様体の恒等写像のJacobi operatorの第1固有値に関係して得られた結果や、metricのconformal変換で、Jacobi operatorがどのように変わるかの結果等をまとめた。
これらの結果の一部は§3のMain Theoremの証明で使われる。

<u>Definition</u> 4-1
(M,g)が(N,h)のRiemannian covering manifoldであるとは、covering mapでlocally isometricな写像$\pi:(M,g)\to(N,h)$が存在することと定義する。このときπをRiemannian covering mapという。

<u>Theorem</u> 4-2
(M,g)が(N,h)のRiemannian covering

manifoldであれば、次の式が成立する。

$$\lambda_1(M,g) \leq \lambda_1(N,h)$$

〈proof of Theorem 4-2〉

仮定より、Riemannian covering map $\pi:(M,g)\to(N,h)$ が存在する。

Remark 1-6 より $X\in\Gamma(TN)$ が存在して、

$$J^{(N,h)}X=\lambda_1(N,h)X$$

となる。X の M への π によるリフトを $\tilde{X}\in\Gamma(TM)$ とすれば、π によって (M,g) と (N,h) は local に isometric だから

$$J^{(M,g)}\tilde{X}=\lambda_1(N,h)\tilde{X}$$

となり、$\tilde{X}$ は $J^{(M,g)}$ の固有 vector field、$\lambda_1(N,h)$ は $J^{(M,g)}$ の固有値となる。$J^{(M,g)}$ の固有値は、下から $\lambda_1(M,g)$ で押さえられていることより、Theorem の式が従う ∎

<u>Remark</u> 4-3

Theorem より、(M,g) が weakly stable

〔resp. strongly stable〕であれば、(N, h) も weakly stable〔resp. strongly stable〕である。

次は harmonic maps の直積の Jacobi operator の第1固有値に関する結果である。

<u>Theorem</u> 4-4

$f_i : (M_i, g_i) \to (N_i, h_i) \quad i=1,2$ を harmonic map とする。このとき次の式が成立する。

$$\lambda_1^{f_1 \times f_2} = \min\{\lambda_1^{f_1}, \lambda_1^{f_2}\}$$

このTheoremより直ちに従うのが次のCorollaryである。

<u>Corollary</u> 4-5

$$\lambda_1(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2) = \min\{\lambda_1(M_1, g_1), \lambda_1(M_2, g_2)\}$$

<proof of Theorem 4-4>

まず使う記号を整理しておく。metricは

固定して考えているので、そのつど指定しない。
例えば、$(N_1 \times N_2, h_1 \times h_2)$ の Levi-Civita connection, curvature tensor や metric は

$$\nabla^{N_1 \times N_2},\ R^{N_1 \times N_2},\ \langle\ ,\ \rangle^{N_1 \times N_2}$$

のように書く。更に、

$$X \in \Gamma((f_1 \times f_2)^{-1}(T(N_1 \times N_2)))$$

等は、

$$X = (X_1, X_2)$$

$$X_i(x_1, x_2) \in T_{x_i} M_i \quad (x_i \in M_i) \quad i = 1, 2$$

と表す。

まず、$f_1 \times f_2$ による $\nabla^{N_1 \times N_2}$ の引き戻しを考える。(c.f. [E.L] p.4)

$$X = (X_1, X_2) \in \Gamma(T(M_1 \times M_2))$$

$$Y = (Y_1, Y_2) \in \Gamma((f_1 \times f_2)^{-1}(T(N_1 \times N_2)))$$

に対して、

$$((f_1 \times f_2)^* \nabla^{N_1 \times N_2})_X Y$$

$$= ((f_1^* \nabla^{N_1})_{X_1} Y_1 + D^{M_2}_{X_2} Y_1,\ D^{M_1}_{X_1} Y_2 + (f_2^* \nabla^{N_2})_{X_2} Y_2)$$

ここで、

$$D^{M_2}_{X_2} Y_1(x_1, x_2(0)) = \frac{\partial}{\partial t} Y_1(x_1, x_2(t))\Big|_{t=0}$$
$$\in (f_1 \times f_2)^{-1} T(N_1 \times N_2)_{(x_1, x_2(0))}$$

ここで, $x_2(t)$ は M_2 の curve で次の式をみたす.

$$\frac{d x_2(t)}{dt}\Big|_{t=0} = X_2$$

とし, $D^{M_1}_{X_1} Y_2$ も同様のものとした。

これより

$$X = (X_1, X_2) \in \Gamma((f_1 \times f_2)^{-1}(T(N_1 \times N_2)))$$

に対して,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{trace}^{M_1 \times M_2} \langle ((f_1 \times f_2)^* \nabla^{N_1 \times N_2}) X, \\
&\qquad\qquad ((f_1 \times f_2)^* \nabla^{N_1 \times N_2}) X \rangle^{N_1 \times N_2} \\
= \ &\mathrm{trace}^{M_1} \langle (f_1^* \nabla^{N_1}) X_1, (f_1^* \nabla^{N_1}) X_1 \rangle^{N_1} \\
&+ \mathrm{trace}^{M_1} \langle D^{M_1} X_2, D^{M_1} X_2 \rangle^{N_2} \\
&+ \mathrm{trace}^{M_2} \langle (f_2^* \nabla^{N_2}) X_2, (f_2^* \nabla^{N_2}) X_2 \rangle^{N_2} \\
&+ \mathrm{trace}^{M_2} \langle D^{M_2} X_1, D^{M_2} X_1 \rangle^{N_1}
\end{aligned}$$

更に, $(N_1 \times N_2, h_1 \times h_2)$ の curvature tensor は

$$X = (X_1, X_2),\ Y = (Y_1, Y_2),\ Z = (Z_1, Z_2)$$
$$\in \Gamma(T(N_1 \times N_2))$$

に対して,

$$R^{N_1\times N_2}(X,Y)Z$$
$$=(R^{N_1}(X_1,Y_1)Z_1,\ R^{N_2}(X_2,Y_2)Z_2)$$
である。よって
$$X=(X_1,X_2)\in\Gamma((f_1\times f_2)^{-1}T(N_1\times N_2))$$
に対して、
$$\langle \mathrm{trace}^{M_1\times M_2} R^{N_1\times N_2}(X, d(f_1\times f_2))\, d(f_1\times f_2), X\rangle^{N_1\times N_2}$$
$$=\langle \mathrm{trace}^{M_1} R^{N_1}(X_1, df_1)df_1, X_1\rangle^{N_1}$$
$$+\langle \mathrm{trace}^{M_2} R^{N_2}(X_2, df_2)df_2, X_2\rangle^{N_2}$$
となる。

そこで、固有値の評価をする。
$$X=(X_1,X_2)\in\Gamma((f_1\times f_2)^{-1}T(N_1\times N_2))$$
であって、$J^{f_1\times f_2}X=\lambda_1^{f_1\times f_2}X$, $X\not\equiv 0$
となるものをとってくる。
$$\lambda_1^{f_1\times f_2}\int_{M_1\times M_2}\langle X, X\rangle^{N_1\times N_2}\, v_{g_1\times g_2}$$
$$=\int_{M_1\times M_2}\langle J^{f_1\times f_2}X, X\rangle^{N_1\times N_2}\, v_{g_1\times g_2}$$
$$=\int_{M_1\times M_2}\{\mathrm{trace}^{M_1\times M_2}\langle (f_1\times f_2)^*\nabla^{N_1\times N_2}X, (f_1\times f_2)^*\nabla^{N_1\times N_2}X\rangle^{N_1\times N_2}$$
$$-\langle \mathrm{trace}^{M_1\times M_2} R^{N_1\times N_2}(X, d(f_1\times f_2))\, d(f_1\times f_2), X\rangle^{N_1\times N_2}\}\, v_{g_1\times g_2}$$

$$\geq \int_{M_2}\int_{M_1}\{\mathrm{trace}^{M_1}\langle f_1^*\nabla^{N_1}X_1, f_1^*\nabla^{N_1}X_1\rangle^{N_1}$$
$$-\langle \mathrm{trace}^{M_1}R^{N_1}(X_1, df_1)df_1, X_1\rangle^{N_1}\}\, v_{g_1}v_{g_2}$$
$$+\int_{M_1}\int_{M_2}\{\mathrm{trace}^{M_2}\langle f_2^*\nabla^{N_2}X_2, f_2^*\nabla^{N_2}X_2\rangle^{N_2}$$
$$-\langle \mathrm{trace}^{M_2}R^{N_2}(X_2, df_2)df_2, X_2\rangle^{N_2}\}\, v_{g_2}v_{g_1}$$
$$\geq \int_{M_2}\lambda_1^{f_1}\int_{M_1}\langle X_1, X_1\rangle^{N_1} v_{g_1}v_{g_2}$$
$$+\int_{M_1}\lambda_1^{f_2}\int_{M_2}\langle X_2, X_2\rangle^{N_2} v_{g_2}\, v_{g_1}$$
$$\geq \min\{\lambda_1^{f_1}, \lambda_1^{f_2}\}\int_{M_1\times M_2}\langle X, X\rangle^{N_1\times N_2} v_{g_1\times g_2}$$

故に，

$$\lambda_1^{f_1\times f_2} \geq \min\{\lambda_1^{f_1}, \lambda_1^{f_2}\}$$

である。

次に逆の不等式を出す。例えば，

$$\lambda_1^{f_1} = \min\{\lambda_1^{f_1}, \lambda_1^{f_2}\}$$

となっているとする。このとき，$\lambda_1^{f_1}$に対する固有vector field $Y_1 \in \Gamma(f_1^{-1}TN_1)$ が存在して

$$J^{f_1}Y_1 = \lambda_1^{f_1}Y_1, \quad Y_1 \neq 0$$

である。

$$Y \in \Gamma((f_1 \times f_2)^{-1} TN_1)$$

を、

$$Y(x_1, x_2) = (Y_1(x_1), 0)$$

とおけば、簡単な計算により、

$$J^{f_1 \times f_2} Y = \lambda_1^{f_1} Y$$

となっている。すなわち、$\lambda_1^{f_1}$ は $J^{f_1 \times f_2}$ の固有値となっている。故に、

$$\lambda_1^{f_1 \times f_2} \leq \lambda_1^{f_1} = \min\{\lambda_1^{f_1}, \lambda_1^{f_2}\}$$

である。

$$\lambda_1^{f_2} = \min\{\lambda_1^{f_1}, \lambda_1^{f_2}\}$$

であっても、同様である。よって 2つの不等式により、Theorem の式が言えた。 ∎

次は、M上に unstable な metric と strongly stable な metric が存在すれば、J度 0 を第1固有値とする metric が存在するというものである。

<u>Theorem</u> 4-6

g_0, g_1 が M上の metrics で、

$\lambda_1(M, g_0) > 0$

$\lambda_1(M, g_1) < 0$

であれば、M上の metric g' が存在して

$\lambda_1(M, g') = 0$

となる。

<proof of Theorem 4-6>

$g_t = (1-t)g_0 + t g_1$

とおけば、$\{g_t\}$は M上の metric の滑らかな族となる。

この$\{g_t\}$に Theorem 1-21 を適用すると、仮定と中間値の定理より、$t_0 \in (0,1)$ が存在して、

$\lambda_1(M, g_{t_0}) = 0$

となる。$g' = g_{t_0}$ ととれ。 ∎

このことを $\Lambda(M)$を使って述べると次のようになる。

Corollary 4-7

$\Lambda(M) \supset \{-1, 1\}$ ならば, $\Lambda(M) = \{-1, 0, 1\}$ となる。

次は metric の conformal 変換によって Jacobi operator 等がどのような変換を受けるかを計算したものである。計算にあたっては, [Y] を参考にした。計算していけば分かるので, 証明は省略する。

Theorem 4-8

(M, g), $\rho \in C^\infty(M)$ に対して, M上の metric g' を

$$g' = e^{2\rho} g$$

とおく。(M, g) に関するものは何もつけずに (M, g') に関するものは, すべて $'$ をつけて表す。このとき,

$$X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$$

に対して, 次の(1)〜(6)の式が成立する。

(1) $\nabla'_X Y = \nabla_X Y + (X\rho)Y + (Y\rho)X - \langle X, Y\rangle \operatorname{grad}\rho$

(2) $\langle R'(X,Y)Z, W\rangle'$

$$= e^{2\rho}\{\langle R(X,Y)Z, W\rangle + \Omega_\rho(X,Z)\langle Y,W\rangle - \Omega_\rho(Y,Z)\langle X,W\rangle + \Omega_\rho(Y,W)\langle X,Z\rangle - \Omega_\rho(X,W)\langle Y,Z\rangle\}$$

ここで、$\Omega_\rho \in \Gamma(S^2(T^*M))$ を

$$\Omega_\rho(X,Y) = (\nabla d\rho)(X,Y) - (X\rho)(Y\rho) + \frac{1}{2}|\operatorname{grad}\rho|^2\langle X,Y\rangle$$

とする。

(3) $\operatorname{Ric}'(X,Y)$

$$= \operatorname{Ric}(X,Y) - (n-2)\{(\nabla d\rho)(X,Y) - (X\rho)(Y\rho) + \langle X,Y\rangle|\operatorname{grad}\rho|^2\} - \langle X,Y\rangle\Delta\rho$$

(4) $S' = e^{2\rho}\{S - 2(n-1)\Delta\rho - (n-1)(n-2)|\operatorname{grad}\rho|^2\}$

S, S': scalar curvatures of (M,g), (M,g')

(5) $\langle \Delta' Z, Z\rangle' - \operatorname{Ric}'(Z,Z)$

$$= \langle \Delta Z, Z\rangle - \operatorname{Ric}(Z,Z) + (n-2)(\nabla d\rho)(Z,Z) - n\langle \nabla_{\operatorname{grad}\rho} Z, Z\rangle - 2\{d\rho(\nabla_Z Z) - \operatorname{div}(Z)\cdot(Z\rho)\}$$

(6) $\operatorname{trace}'\langle \nabla' Z, \nabla' W\rangle' - \operatorname{Ric}'(Z,W)$

$$= \operatorname{tr}\langle \nabla Z, \nabla W\rangle - \operatorname{Ric}(Z,W) + \operatorname{div}'\{\langle Z,W\rangle \operatorname{grad}\rho + (W\rho)Z + (Z\rho)W\} - 2n(Z\rho)(W\rho) - 2d\rho(\nabla_Z W + \nabla_W Z) + (n-4)(\nabla d\rho)(Z,W)$$

References

[E.L] J. Eells and L. Lemaire, Selected topics in harmonic maps, CBMS Reg. Conf. Series, No. 50 (1983)

[G.Y] L.Z. Gao and S.T. Yau, The existence of negatively Ricci curved metrics on three manifolds, Invent. math. 85(1986) 637-652

[I] T. Ishihara, The index of a holomorphic mapping and the index theorem, Proc. Amer. Math. Soc., 66 (1977) 169-174

[K.W] J.L. Kazdan and F.W. Warner, Curvature functions for compact 2-manifolds, Ann. of Math. (2) 99 (1974), 14-47

[K.N] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential geometry, vol. I, Interscience, New York, (1963)

[K] K. Kodaira, 複素多様体論 III, 岩波講座 基礎数学

[K.S] K. Kodaira and D.C. Spencer, On

deformations of complex analytic structures III, Ann. of Math. 71 (1960), 43-76

[Oh] Y. Ohnita, Stability of harmonic maps and standard minimal immersions, Tohoku Math. J., 38 (1986), 259-267

[Sm] R.T. Smith, The second variation formula for harmonic mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 47 (1975), 229-236

[U1] H. Urakawa, Survey in harmonic mappings, 数理解析研究所講究録 600 (1986) 52-116

[U2] H. Urakawa, The first eigen value of the Laplacian for a positively curved homogeneous Riemannian manifold, Compos. Math. 59 (1986), 57-71

[U3] H. Urakawa, Stability of harmonic maps and eigenvalues of Laplacian, Lecture Note in Math. 1201, Curvature and Topology of Riemannian Manifolds, Proceedings, Katata 1985, 285-307

[Wa] F.W. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie groups. Graduate Texts in Mathematics 94, Springer

[Wh] B. White, Infima of energy functionals in homotopy classes of mappings, J. Differential Geometry 23 (1986) 127 - 142

[Wo] J.A. Wolf, Spaces of constant curvature, McGraw-Hill Book Company, New York, (1967)

[Y] H. Yamabe, On the deformation of Riemannian structures on compact manifolds, Osaka Math. J. 12 (1960), 21-37.